Segundo Trabajo Práctico

Entrega de las respuesta.

- Este Trabajo Práctico está disponible en la sección "Trabajos Prácticos" del aula virtual desde las 9:00hs del lunes 8/6/20.
- Deben enviar su respuesta a través del aula virtual, en la misma sección "Trabajos Prácticos", antes de las 18hs del miércoles 10/6/20.
- El sistema sólo acepta archivos pdf. Pueden sacarle fotos a sus hojas y convertirlas en pdf o (recomendado) usar aplicaciones para celulares como "Tiny Scanner", "FotoScan", "CamScanner", etc. que simulan un escáner. También pueden escribir su respuesta utilizando medios digitales (procesadores de textos, tablet, etc).
- En caso de tener problemas de conexión a internet u algún otro problema pueden enviar su respuesta por email (cristianvay@gmail.com) o usando telegram al docente Cristian Vay. Usar esta opción sólo en caso de ser necesario.

Pautas a tener en cuenta.

- Justificar todas las respuestas.
- Puede usar cualquier método y resultado para responder siempre y cuando esté bien justificado.
- Recuerde indicar en sus respuestas las operaciones elementales por filas que realiza.
- No se responderán preguntas de ningún tipo.

Se aprueba con 40 puntos o más.

Ejercicios.

(1) (10 puntos cada item) Sea W el siguiente subsespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:

$$W = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{rr} x - z + 2w = 0, & y + 2z - w = 0, \\ -x + 2y + 5z - 4w = 0, & 2x - y - 4z + 5w = 0 \end{array} \right\}$$

(a) Dar una base y la dimensión de W.
(b) Extender a una base de $\mathbb{R}^4$ la base que haya dado en el item anterior.

(2) (10 puntos cada item) Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por el siguiente conjunto

$$S = \Big\{ (1,0,-1,2), (0,1,2,-1), (-1,2,5,-4), (2,-1,-4,5) \Big\}$$

(a) Caracterizar con ecuaciones a V.
(b) Dar una base de V formada por vectores de S y determinar la dimensión de V.

(3) (5 puntos cada item) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
(a) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.
(b) Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^8$ de dimensión 5, entonces $W_1 \cap W_2 = 0$.

(4) (7,5 puntos cada item) Sea $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}_{<4}[x]$ la transformación lineal definida por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - c + 2d)x^3 + (b + 2c - d)x^2 + (-a + 2b + 5c - 4d)x + (2a - b - 4c + 5d)$$

(a) Decir cuáles de los siguientes matrices están en el núcleo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Decir cuáles de los siguientes polinómios están en la imagen:

$$p = (x-1)(x-1), \quad q = x^3 - x^2 - 3x + 3, \quad r = x^3$$

(5) (5 puntos cada item) Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = (1,1)$, $T(e_2) = (1,2)$ y $T(e_3) = (1,3)$.
(a) Calcular $T(10,-1,1)$ y $T(-1,1,0)$.
(b) Dar la matriz de T con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

(6) (5 puntos cada item) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
(a) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que los vectores $(1,0,-1,2)$, $(0,1,2,-1,)$ y $(0,0,2,2)$ pertenecen a la imagen de T.
(b) Si $T : \mathbb{R}^{13} \to \mathbb{R}^9$ es una transformación lineal, entonces $\dim \mathrm{Nu}(T) \geq 4$.
(c) Sea $T : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un epimorfismo y W un subespacio de $\mathbb{R}^6$ con $\dim W = 3$. Entonces existe $0 \neq w \in W$ tal que $T(w) = 0$.

(7) (5 puntos cada item) Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V.
(a) Probar que cualquier subconjunto no vació de $\mathcal{B}$ es LI.
(b) Para cada $k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$, dar un subespacio vectorial de V de dimensión k.